

# Evaluación e Implementación en Hardware DSP de un Algoritmo para Estimación de Frecuencias en base a la Descomposición de la Matriz de Autocorrelación

Ismael Vidal D. Hugo Durney W.

Universidad Tecnológica Metropolitana, Departamento de Electricidad.  
Av. José Pedro Alessandri 1242, Ed. Fac. de Ingeniería of. N°19, Santiago, Chile.  
Fono : 56-2-7877071 ; Fax: 56-2-7877119;  
E-mail: [ismael.vidal@gmail.com](mailto:ismael.vidal@gmail.com) ; [hdurney@utem.cl](mailto:hdurney@utem.cl)

## Resumen

El presente artículo describe y analiza una técnica de procesamiento de señales, alternativa al uso de la FFT, para la estimación de componentes de frecuencia sinusoidales inmersos en ruido blanco. Inicialmente se desarrolla el análisis de elementos teóricos y matemáticos que intervienen en la estimación espectral, donde es fundamental la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz de autocorrelación. El algoritmo es luego evaluado a través de su simulación matemática y su implementación en hardware de DSP. Finalmente se presenta un contraste de algunos resultados obtenidos, concluyendo con una valoración comparativa de esta técnica y sus posibles aplicaciones.

## Abstract

This paper describes and analyzes a signal processing technique, alternative to the well known FFT for the estimation of narrowband (sinusoidal) components immersed in white noise. We start by developing the theoretical analysis of some mathematical elements involved in the spectral estimation and focus ourselves on the singular value decomposition of the autocorrelation matrix. The algorithm is then evaluated via simulation and later implemented in DSP hardware. Finally some experimental results are commented to conclude with a comparative assessment of this technique and its applications.

**Palabras Clave** — Autovalores, DSP, estimación de frecuencia, MUSIC, SVD.

## 1.- Introducción

En el ámbito del procesamiento digital de señales la estimación espectral constituye un área de estudio de especial interés [1]. La estimación de frecuencias, y detección de componentes puras de frecuencia dentro de señales ruidosas o determinados anchos de banda constituye la base para diversas aplicaciones tales como la clasificación de componentes para reconocimiento de emisor[3][3], estimación de dirección de llegada (DOA) [4] y/o seguimiento de usuarios (tracking) en esquemas de arreglos de sensores inteligentes [5] y la detección de portadoras inmersas en ruido [6], entre otras. Para esto último, además del reconocido uso de la DFT, existen diversos métodos y estimadores no paramétricos de frecuencia muchos de los cuales se hallan basados en la obtención, del periodograma y diversas variantes que incorporan distintos métodos de promediado y enventanado. Otros métodos, clasificados como paramétricos, consideran la confianza en un modelo específico para

la señal que se procesa y se basan normalmente en la generación de parámetros de estimación en base a modelos, momentos y funciones estadísticas asociadas a la señal, tal como la covarianza, la autocorrelación, etc. La búsqueda de un proceso discreto que representase fielmente las composición frecuencial de las señales de comunicaciones, donde la relación de la potencia de señal a ruido (SNR) resulta crítica, alcanzó su punto cúlmine con la formulación del algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT), el cual es simplemente un algoritmo que optimiza la operatoria necesaria para la evaluación numérica de integrales de Fourier, y cuya principal ventaja radica en la rapidez de cálculo conseguida, pero cuya principal limitación es la resolución en frecuencia. En este contexto, el presente trabajo busca aportar un análisis comprensivo de un tipo de estimador paramétrico que da origen a los algoritmos MUSIC (Multiple Signal Classification), Pisarenko y Johnson [7], algoritmos que si bien no puede competir en rendimiento con una FFT, presentan cualidades de distinta índole que hacen muy atractiva su comprensión para aquellos que incursionan en el conocimiento de procesamiento digital de señales.

En el presente trabajo comenzamos por definir algunos elementos matemáticos asociados a la herramienta de análisis principal utilizada en este tipo de estimación, luego desarrollamos la formulación comprensiva paso a paso que permite llegar al estimador general utilizado por los tres algoritmos. Posteriormente se presenta el desarrollo de la simulación numérica del algoritmo en Matlab y su implementación en la plataforma DSP TMS320c5402 de Texas Instruments. Finalmente se presentan algunos resultados obtenidos en ambos casos y se aportan las conclusiones surgidas desde el análisis teórico y práctico de la técnica estudiada.

## 2.- Descomposición en valores singulares y autovectores de una matriz de autocorrelación.

El algoritmo estudiado forma parte de una familia de algoritmos basados en el análisis de autovectores y autovalores (también conocidos como eigenvectors and eigenvalues respectivamente[8][9]). En general, un autovector o vector propio  $\mathbf{x}$  de una transformación lineal  $\mathbf{A}$  está definido a través de la relación

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Donde  $\lambda$  es un escalar que puede ser complejo y corresponde al autovalor asociado al autovector  $\mathbf{x}$ . Esto quiere decir que el efecto de una transformación lineal aplicada sobre cualquiera de sus autovectores se reduce a un simple escalamiento del mismo.

Sean  $y[n]$  las muestras de una señal o proceso discreto. Se define una ventana  $\mathbf{y}$  de  $M$  muestras consecutivas, definida como el vector columna

$$\mathbf{y} = [y[n] \ y[n+1] \ \dots \ y[n+M-1]]^T \quad (1)$$

a partir del cual se define la matriz de autocorrelación  $\mathbf{R}_{yy}$  de la señal

$$\mathbf{R}_{yy} = E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^H\} \quad (2)$$

que queda como una matriz de tamaño  $M \times M$ , donde  $E\{\}$  es el operador esperanza matemática o media del proceso. Cuando las señales que consideramos para el procesamiento y análisis discreto son (como resulta ser en el común de los casos) procesos estadísticamente estacionarios, sus respectivas matrices de autocorrelación son matrices normales hermíticas, es decir cumplen con

$$\mathbf{R}_{yy} \mathbf{R}_{yy}^H = \mathbf{R}_{yy}^H \mathbf{R}_{yy}$$

y por tanto permiten la *descomposición en valores singulares* o SVD, la cual estará definida, para la matriz en (2) como

$$\text{svd}(\mathbf{R}_{yy}) = \mathbf{V} \mathbf{D}_I \mathbf{U}^H \quad (3)$$

Donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son matrices cuadradas de tamaño  $M \times M$ , cuyas columnas corresponden a los autovectores de  $\mathbf{R}_{yy} \mathbf{R}_{yy}^H$  y  $\mathbf{R}_{yy}^H \mathbf{R}_{yy}$

respectivamente, mientras que  $\mathbf{D}_I$  es una matriz diagonal que contiene en su diagonal principal los valores singulares (la raíz cuadrada de los autovalores) asociados a los autovectores en  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{U}$ . Las matrices de autovectores obtenidas a su vez verifican

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{U}^H \mathbf{V} = \mathbf{V}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$$

Lo que confirma la ortonormalidad de los autovectores como base de un subespacio.

### 3.- Formulación del algoritmo de estimación

El modelo de señal muestreada  $y[n]$ , cuya composición espectral se quiere estimar, corresponde a la combinación de  $p$  sinusoides complejas inmersas en ruido complejo gaussiano blanco aditivo (AWGN), lo cual es representado matemáticamente de la siguiente forma:

$$y[n] = \sum_{i=1}^p A_i e^{j(2\pi f_i n + \mathbf{f}_i)} + \mathbf{h}[n] \quad (4)$$

Donde los parámetros de amplitud, frecuencia y fase de la  $i$ -ésima senoide  $A_i, f_i, \mathbf{f}_i$  respectivamente, se asumen constantes y desconocidos. Además, se asume que las fases  $\mathbf{f}_i$  son variables aleatorias independientes, uniformemente distribuidas en  $[-\pi, \pi]$  y que el ruido  $\mathbf{h}[n]$  es un proceso estadísticamente independiente de las señales puras comprendidas en el sumatorio. Al tratarse de un

modelo discreto de señal, el parámetro  $f_i$  corresponderá a la frecuencia normalizada

$$f_i = \frac{f}{f_s},$$

donde la variable  $f_s$  denota la frecuencia de muestreo. Bajo estas condiciones la función de autocorrelación de  $y[n]$  equivale a

$$r[k] = \sum_{i=1}^p A_i^2 e^{j2\pi f_i k} + \mathbf{s}^2 \mathbf{d}[k]. \quad (5)$$

La separación de términos en (5) señala el hecho de que las componentes de señal y ruido son estadísticamente independientes. La autocorrelación del ruido corresponde a un impulso centrado en el origen ponderando la varianza  $\mathbf{s}^2$ , lo que se conoce como hipótesis de ruido blanco.

A partir de un registro disponible de  $N$  muestras de la señal  $y[n]$ , se establece para cada tiempo discreto  $n = [1, \dots, N]$ , una ventana  $\mathbf{y}$  de  $M$  muestras definida como el vector columna en (1). Se realiza entonces una estimación de la matriz de autocorrelación de  $y[n]$ , obteniendo una matriz de tamaño  $M \times M$

$$\mathbf{R}_{yy} = \frac{1}{N-M} \sum_{n=1}^{N-M} \mathbf{y}\mathbf{y}^H \quad (6)$$

donde el operador esperanza matemática de la definición en (2) es implementado como el mayor promediado posible a lo largo de toda la muestra.

En la formulación del algoritmo de estimación, para definir el tamaño de la ventana (cantidad de muestras  $M$ ) es necesario establecer el número de frecuencias  $N_f$  de componentes puras que se desean estimar en la gráfica final. Entonces  $M$  debe satisfacer la desigualdad

$$M \geq N_f + 1 \quad (7)$$

Donde cabe señalar que en caso de considerar un modelo de señal sinusoidal, tomando sólo la parte real de (4), se deberá considerar la desigualdad en (7) como  $M \geq 2N_f + 1$ , ya que en ese caso la estimación incluirá también la parte reflejada (negativa) de la conformación espectral de la señal.

Los componentes sinusoidales puros pueden ser expresados en base a vectores normalizados  $\mathbf{s}_{f_i}$  de exponenciales complejas asociadas a cada frecuencia  $f_i$ , los que son definidos como los vectores columna

$$\mathbf{s}_{f_i} = [1 \ e^{-j2\pi f_i} \ e^{-j2\pi 2f_i} \ \dots \ e^{j[M-1]2\pi f_i}]^T. \quad (8)$$

Aplicando la definición en (8), la matriz de autocorrelación estimada en (6) puede ser, en caso de efectuar un promediado suficiente, definida idealmente como sigue:

$$\mathbf{R}_{yy} = \sum_{i=1}^p A_i^2 \mathbf{s}_{f_i} \mathbf{s}_{f_i}^H + \mathbf{s}^2 \mathbf{I} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{hh} \quad (9)$$

Donde asumimos que el subespacio de ruido es ortogonal al subespacio de señal expresando la matriz de autocorrelación total de la señal  $\mathbf{R}_{yy}$  como la suma de matrices de autocorrelación independientes para la suma de componentes sinusoidales puras  $\mathbf{R}_{ss}$  y del ruido  $\mathbf{R}_{hh}$ . Esta última, al tratarse de ruido blanco gaussiano, puede ser asignada como una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal corresponderán a la varianza o potencia del ruido <sup>2</sup>.

Luego, de acuerdo con la definición aportada junto a la ecuación (3) la descomposición en valores singulares de la matriz  $\mathbf{R}_{yy}$  equivale al producto de tres matrices según las siguientes expresiones

$$\text{svd}(\mathbf{R}_{yy}) = \mathbf{V} \mathbf{D}_I \mathbf{U}^H = [\mathbf{V}_s \mathbf{V}_r] \mathbf{D}_I [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_r]^H \quad (10)$$

$$= [\mathbf{V}_s \mathbf{V}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 + \mathbf{s}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_p + \mathbf{s}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{s}^2 \end{bmatrix} [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_r]^H \quad (11)$$

La descomposición SVD incorpora en su algorítmica un ordenamiento de mayor a menor para los valores singulares presentes en la matriz diagonal  $\mathbf{D}_I$ . Este ordenamiento afectará también la posición de los autovectores columna presentes en  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{U}$  ya que éstos están asociados de manera biunívoca con cada valor singular. En (10) la matriz de  $(M \times p)$   $\mathbf{V}_s = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_p]$  contiene al conjunto de autovectores columna asociados al subespacio de señal mientras que la matriz de  $(M \times M-p)$   $\mathbf{V}_r = [\mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_M]$  está conformada por el conjunto de autovectores columna asociados al subespacio de ruido. La misma distribución aplica para la composición de autovectores presentes en  $\mathbf{U}$ . La visualización detallada de la estructura matricial en (10) y (11) nos da una idea de cuántas componentes espectrales se pueden reconocer a partir de este proceso. Se observa que en la diagonal principal de  $\mathbf{D}_I$  los primeros  $p$  términos contienen la suma del  $i$ -ésimo valor singular más la varianza del ruido (que es la misma a lo largo de toda la diagonal) y que los siguientes  $M-p$  valores de la diagonal, al no existir señal asociada, contendrán sólo términos de ruido y por lo tanto serán significativamente menores de acuerdo a la SNR lo cual permitirá la discriminación del número de componentes puras de señal presentes en la muestra.

El estimador utilizado en este tipo de algoritmos consiste en construir una función  $P[f]$  que genere un pseudo-espectro a partir de cuyos máximos sea posible visualizar la presencia de tonos puros y localizar la frecuencia a que corresponden. La función generadora del pseudo-espectro de frecuencias tendrá entonces la siguiente estructura [7]:

$$P[f_i] = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^M \mathbf{a}_k |\mathbf{s}_{f_i}^H \mathbf{v}_k|^2} \quad (12)$$

Donde la obtención de la estimación del espectro se encuentra basada en la ortogonalidad que se debe verificar al efectuar el producto escalar un vector base de frecuencias puras  $\mathbf{s}_{f_i}$ , creado según la definición en (8), con el total del conjunto de autovectores pertenecientes al subespacio de ruido (rango  $k = p+1, \dots, M$  en el sumatorio). Dicha ortogonalidad se verificará con valores muy cercanos a cero en el denominador para aquellas  $f_i$  correspondientes a las componentes senoidales efectivamente presentes en la muestra, dando origen a picos elevados en el pseudo espectro estimado, esto es

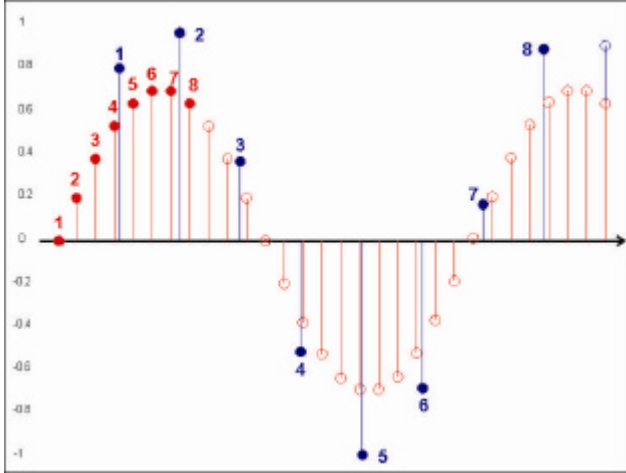
$$\mathbf{s}_{f_i}^H \mathbf{v}_j \rightarrow 0 \quad \text{con } i = (1, \dots, p) \quad \text{y con } j = (p+1, \dots, M).$$

Para los restantes valores de  $f_i$  en el recorrido del espectro entre  $-f_s/2$  y  $f_s/2$  que no correspondan exactamente a frecuencias de tonos puros presentes en la muestra, el denominador en (12) tendrá valores cercanos o superiores a la unidad con lo cual su inversa entregará valores uniformemente menores a los picos espectrales obtenidos para los tonos detectados.

A partir del estimador general en (12) nacen tres métodos específicos para utilizar este tipo de estimador de frecuencia, que han sido propuestos en la literatura. Haciendo  $\mathbf{a}_k = 1 \quad \forall k$ , obtenemos el estimador de los métodos MUSIC y Pisarenko, el cual está basado estrictamente en los autovectores del subespacio de ruido con ponderación uniforme. Así cuando en la desigualdad (7)  $M > N_f + 1$  estamos aplicando el método MUSIC y aseguramos en exceso tamaño de la matriz de autocorrelación pero debemos tener el cuidado de que  $M$  no se aproxime mucho a  $N$  para que el promediado en (6) no sea deficiente. En cambio, al usar el método Pisarenko, hacemos  $M = N_f + 1$  de manera de utilizar el mínimo tamaño posible de la matriz de autocorrelación lo que disminuye el coste computacional para alcanzar un buen promedio en (6) y facilitar la descomposición en (10) pero nos impone la necesidad de no elevar demasiado la frecuencia de muestreo de la señal para que la matriz de autocorrelación estimada no sea deficientemente representativa. Cuando esto ocurre si elegimos  $\mathbf{a}_k = 1/\mathbf{I}_k$  obtenemos el estimador del método Johnson como

$$P[f_i] = \frac{1}{\sum_{k=p+1}^M \frac{1}{\mathbf{I}_k} |\mathbf{s}_{f_i}^H \mathbf{v}_k|^2} \quad (13)$$

En el cual cada autovector perteneciente al subespacio de ruido es ponderado por el inverso de su valor singular asociado. Esta incorporación es significativamente útil cuando las condiciones de generación y promediado de la matriz de autocorrelación resultan ser muy diferentes para distintas componentes sinusoidales  $f_i$



**Figura 1 :** Dos señales de la misma frecuencia son muestreadas con distintas frecuencias de muestreo  $f_1 > f_2$ . Al considerar la misma longitud de enventanado  $M = 8$ , de las muestras obtenidas con  $f_1$  (en rojo) se obtiene según (6) una matriz de autocorrelación de características relativamente deficientes respecto a la que se obtiene con  $f_2$  para representar las características de la señal.

presentes en una misma muestra. Esto, ya que dada una frecuencia de muestreo común  $f_s$ , la ventana definida en (1) abarcará un intervalo temporal  $T_M$  cuya representatividad sobre cada periodo  $T_i = 1/f_i$  dependerá de la relación  $T_M/T_i$  con lo cual la condición de rango de estimación de la matriz de autocorrelación (6) puede llegar a ser suficiente para la estimación de una componente pero deficiente para otra de frecuencia menor. Esto último está ejemplificado en la figura 1 para dos señales que poseen la misma frecuencia.

#### 4.- Simulación en Matlab e implementación en el DSP TMS320c5402.

Las tres variantes del algoritmo de estimación expuestas en la sección anterior fueron programadas en el software de simulación Matlab. Este software dispone de una subrutina específica que permite obtener la descomposición SVD de manera inmediata a través de la instrucción

$$[V, L, U] = \text{svd}(R_{yy})$$

donde  $R_{yy}$  corresponde a la matriz que se quiere descomponer y  $V, L, U$  son las matrices  $V, D, U$  resultantes de la descomposición tal y como fueron definidas en (3). La generación de las componentes puras de señal es determinista ya que asumimos que nuestro objetivo es la detección de componentes sinusoidales complejas puras según (4), y por otra parte para la generación del ruido de (AWGN) se utiliza la función  $\text{randn}()$  que corresponde a un generador pseudo aleatorio de números con distribución gaussiana de media nula y potencia unitaria  $\mathbf{S}^2 = 1$ . Los experimentos considerarán la detección y estimación de componentes sinusoidales

correspondientes a un cierto rango de notas musicales (frecuencias de audio), esto a fin de considerar el mismo rango de frecuencias que posteriormente será posible procesar a través del hardware DSP utilizado. A continuación listamos un ejemplo específico de código Matlab para la obtención de la estimación espectral de dos tonos puros de igual amplitud combinados, correspondientes a las notas musicales DO (264Hz) y SOL (396Hz).

```

%
%VARIABLES INICIALES
Ttot = 0.1; % tiempo total de la muestra en segundos
fs = 2000; % frec de muestreo
p = 2; % N° de tonos puros en la señal
M = 4; % dimension de la ventana de la matriz Ryy
pr = 0.1; % potencia del ruido
Nfrecs = 1000; % resolucio del eje de frecuencias
frecs = linspace(-fs/2,fs/2,Nfrecs); % base de frecuencias
frecs_norm = frecs/fs; % base de frecuencias normalizada
Ts = 1/fs; % tiempo de duracion de una muestra
N = round(Ttot/Ts); % numero total de muestras
n = [1:N]; % base de tiempo discreto
%
%FRECS NOTAS MUSICALES (Hertz)
do = 264;
sol = 396;
%
% GENERACION DE SEÑAL
y_tonos = exp(j*2*pi*(sol/fs)*n) + exp(j*2*pi*(do/fs)*n);
ruido = sqrt(pr/2)*(randn(1,N) + j*randn(1,N));
y_total = (y_tonos + ruido).';
%
% ESTIMACION DE LA MATRIZ DE AUTOCORRELACION
Ryy = zeros(M,M);
for m = 1:(N-M);
    y = y_total(m:m+M-1);
    Ryy = Ryy + y*y';
end
Ryy = (1/(N-M))*Ryy; % matriz de autocorrelacion estimada
%
% Descomposicion SVD
[V,L,U] = svd(Ryy);
%
% Estimacion del pseudo espectro P
for ix_f = 1:Nfrecs;
    e = exp(j*2*pi*frecs_norm(ix_f)*[0:M-1].');
    P(ix_f) = 1/(sum(abs(e'*V(:,p+1:end)).^2));
end
%
plot(frecs,P);
%
% FIN

```

En el ejemplo anterior, ya que  $M > N_f + 1$  estamos implementando el método MUSIC pero muy próximos al límite mínimo establecido en el método Pisarenko, el cual es fácil de testear haciendo  $M = N_f + 1 = 3$ . La implementación del método Johnson sobre este mismo ejemplo sólo requiere la siguiente modificación en el último ciclo de estimación :

```

%
% Estimacion del pseudo espectro P
lambdas = diag(L).';
lambdas_r = lambdas(p+1:end);
for ix_f = 1:Nfrecs;
    e = exp(j*2*pi*frecs_norm(ix_f)*[0:M-1].');
    aux = (abs(e'*V(:,p+1:end)).^2)./lambdas_r;
    P(ix_f) = 1/(sum(aux));
end
%

```

donde  $\text{lambdas}_r$  corresponde a un vector fila con los valores singulares asociados al subespacio de ruido tal como se definieron para el método Johnson en (13).

Para la implementación en hardware se utilizó la plataforma DSK (DSP Starter Kit) TMS320c5402 de Texas Instruments. La información sobre esta familia de dispositivos y los detalles en torno a la implementación de aplicaciones en base a ellos está ampliamente disponible en la referencia [10]. Sin embargo, entre las características generales del DSK utilizado es relevante mencionar que su rango de aplicaciones está limitado a frecuencias de audio con calidad telefónica al contar con una ADC con frecuencia de muestreo máxima de 16KHz. La programación del algoritmo en la tarjeta DSK se efectúa en lenguaje C++, existiendo la ventaja de que es posible encontrar rutinas prediseñadas [11] para efectuar operaciones como la descomposición SVD. Esto significa que el programador de la DSK no necesariamente debe implementar algunos procesos numéricos típicos, pero hay que señalar que de todas maneras deberá saber integrar correctamente dichas rutinas al contexto total de su aplicación en C++.

### 5.- Resultados y Conclusiones

Las figuras 2 a la 5 muestran tanto los resultados de algunas pruebas de simulación vía MATLAB efectuadas para los tres métodos de estimación como el resultados entregados por la interfaz gráfica que ofrece el software “Code Composer Studio” asociado a la plataforma DSP. En la figura 2 se han aplicado exactamente los parámetros definidos en el ejemplo de código MATLAB de la sección 4. Las estimaciones obtenidas con el método Pisarenko y sus correspondientes errores porcentuales son: 264.8Hz@0.30%, 397Hz@0.25%, los valores hallados con los otro métodos presentan un error aún menor. En las figuras 3 y 4 es posible apreciar un contraste entre la simulación en MATLAB y la ejecución del algoritmo MUSIC en la plataforma DSP programada. Las condiciones de muestreo, longitud de la ventana y relación señal a ruido son las mismas para ambos casos. Pese a la ruidosa condición de la señal procesada (se estimó una SNR de 3 dB), los errores porcentuales en ambos casos no superan el 2% que representan diferencias de un máximo de 5 Hz.

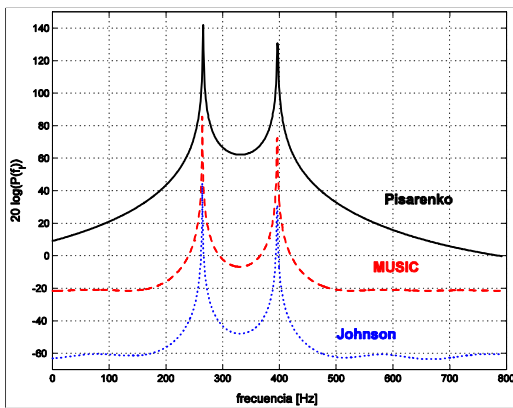


Figura 2: Estimación espectral en MATLAB para tonos DO (264Hz) y SOL (396Hz) a través de los tres métodos comparados. Corresponde al ejemplo de la sección 4.

Finalmente en las figuras 5(a) y 5(b) se ejecuta una prueba comparada de simulación e implementación hardware para la estimación de un tono único de 264 Hz. En particular, resulta interesante notar la inclusión de una estimación vía FFT de longitud mínima, la cual arroja un valor central de 275 Hz que representa un error de 4.16%, mucho mayor que lo obtenido con los métodos

paramétricos estudiados, lo cual confirma lo establecido en la literatura en relación a la relativa capacidad de resolución que presenta la FFT como desventaja comparativa.

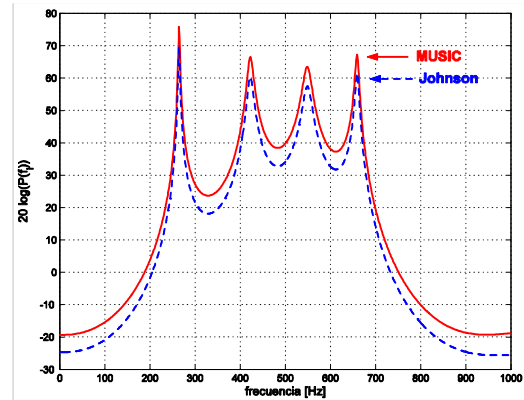


Figura 3: Estimación espectral en MATLAB para la combinación de tonos DO (264 Hz), SOL#, (422 Hz) DO# (550 Hz), MI (660 Hz), a través de métodos MUSIC y Johnson. Corresponde a la implementación en hardware DSP de la figura 4.

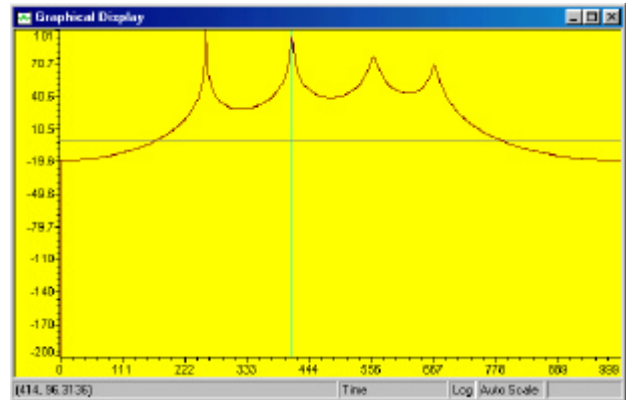


Figura 4: Interfaz gráfica del software asociado al DSP. Se aprecia la detección de cuatro frecuencias correspondientes a las notas musicales DO (264Hz), SOL# (422Hz), REb (550Hz) y MI (660Hz) ejecutadas desde un piano acústico y obtenidas a través de una entrada de micrófono disponible en la tarjeta. Las estimaciones obtenidas y sus correspondientes errores porcentuales son: 262Hz@0.75%, 414Hz@1.89%, 560Hz@1.81% y 669Hz@1.36% respectivamente. Para poder apreciar las amplitudes relativas de las componentes más altas se consideró un eje vertical en escala logarítmica.

Entre las conclusiones generales que el análisis teórico de la técnica estudiada con apoyo experimental digital nos entrega podemos puntualizar que:

- La amplitud en la generación de pseudos espectro para una combinación de varias componentes sinusoidales, la relación de altura de los picos espectrales obtenidos no guarda estrictamente la misma relación existente entre las amplitudes  $A_i$  de las correspondientes señales, debido a esto es que estos métodos están orientados específicamente a la estimación de frecuencia o ángulo mientras que no resultan útiles para hallar relaciones de potencia entre señales.

- El desarrollo de la FFT considera simplemente la evaluación numérica optimizada de la formulación matemática de la DFT. El algoritmo MUSIC en cambio posibilita desglosar en diferentes etapas su desarrollo, haciendo que su explicación proporcione al estudiante la aplicación y comprensión de poderosas herramientas del álgebra matricial.

- En la medida que se agranda  $M$  se debe agrandar  $N$  para que el promediado de la matriz de autocorrelación sea confiable.

- Un excesivo incremento en la potencia del ruido genera pérdidas en la exactitud de la estimación pero los autovalores siempre se seguirán ordenando correctamente de mayor a menor.

Cuando se conoce la solución exacta de la matriz de correlación y se observa su diagonalización, se tiene que los primeros  $p$  autovalores ubicados en la diagonal principal de la matriz corresponden a la suma del autovalor de señal  $1$  con el autovalor de ruido  $s^2$  para cada posición en la diagonal, mientras que en las  $M-p$  posiciones restantes de la diagonal (subespacio de ruido) se encuentran sólo los autovalores  $s^2$  que en este caso ideal mantienen el mismo valor a lo largo de todas las posiciones.

- Para cada realización efectuada se reestablecía la fase de cada componente sinusoidal con una distribución aleatoria de probabilidad uniforme. Se comprobó que los valores de fase no tienen ninguna influencia en la estimación de las frecuencias.

- Una de las relaciones más determinantes parecería ser a simple vista la razón entre el número de muestras  $N$  y el tamaño de la ventana  $M$ , esto es a mayor  $N/M$  se tendrá mayor precisión y resolución en especial para valores más bajos de frecuencia a estimar en el promediado ergódico para la estimación de la matriz de autocorrelación.

- Si la relación de representatividad que tienen las muestras de la ventana es deficiente no se logran mejorías con el aumento de la longitud de la muestra que sólo implica más promediados de una matriz de autocorrelación que ya será por definición deficiente para representar los modos de la señal.

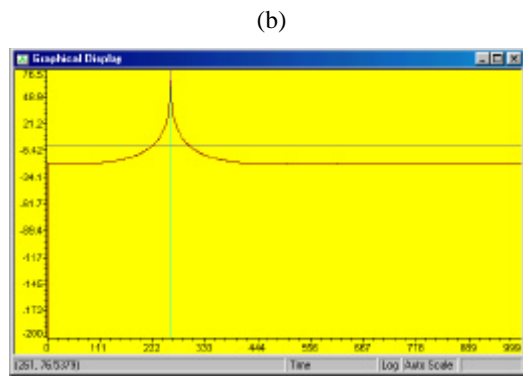
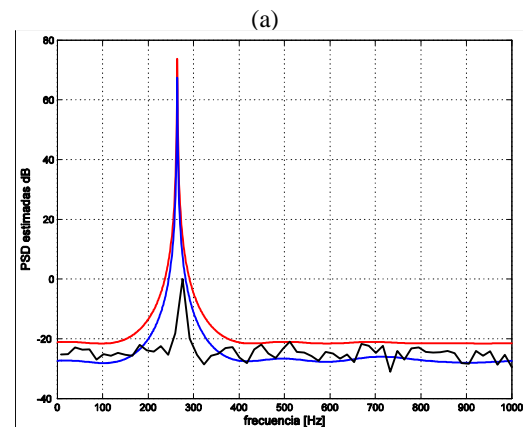
- Mayor cantidad de muestras en la senoide implica una mala matriz de autocorrelación, si la ventana de  $M$  valores resulta muy poco representativa de la señal. Esto no ocurre igualmente con el ruido cuyas muestras son incorreladas entre si.

Como línea de trabajo adicional inmediata, resultará interesante generar el algoritmo que detecte los máximos del pseudo-espectro y efectúe la asignación de frecuencia automáticamente a partir de alguna tabla de asignación que permita, por ejemplo, la clasificación de los acordes muestreados por el DSP.

## Referencias

- [1] P. Stoica and R.J. Moses, "Introduction to Spectral Analysis". Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.
- [2] S.Kay, "Modern Spectral Estimation: Theory and Applications", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1988.
- [3] R.O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 34, pp. 276-280, 1986.
- [4] J.F. Yang and M .Kaveh, "Adaptive eigensubspace algorithms for direction or frequency estimation and tracking", , IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing , Vol 36, Issue 2, pp. 241-251, Feb.1998.

- [5] Stoica and A. Nehorai, "Statistical efficiency study of direction estimation methods, Part I: Analysis of MUSIC and preliminary study of MLM," Advances in Spectrum Analysis and Array Processing, S. Haykin, Ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, vol. 1, pp. 263-305, 1991.
- [6] V.F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function", Geophysics J.Royal Ast. Soc., vol.33, pp.347-366, 1973.
- [7] L.Marple, "Digital Spectral Analysis With Applications", Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [8] S.Haykin, "Adaptive Filter Theory", 4a edition, cap.3, Ed. Prentice-Hall, USA, 1996.
- [9] G.H Golub and C.F. Van Loan, "Matriz Computations", 2ª edition, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [10] Texas Instruments. Sitio web del fabricante de las tarjetas DSP utilizadas <http://www.ti.com/>.
- [11] Numerical recipes in C. Sitio web con libros on-line de la Cornell University. Información específica sobre la descomposición SVD en <http://www.library.cornell.edu> .



**Figura 5:** (a) Estimación en MATLAB de un tono único de 264 Hz. Se observa el sesgo en el espectro obtenido con la FFT (b) Estimación del mismo tono mediante MUSIC en el DSP.